SOLUCIONARIO PARA BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO

ETAPA CLASIFICATORIA

**Problema #1**

En la primera casilla del tablero está escrito y en la novena casilla está escrito .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 201 |  |  |  |  |  |  |  | 2550 |

Indicar que número debería ir en la segunda casilla de la izquierda a la derecha del tablero de modo que en cada casilla, a partir de la tercera, cada número sea igual a la suma de los números de las dos casillas anteriores.

**Solución:**

Sea el número que será escrito en la segundo casilla, entonces el tablero quedaría de la siguiente manera

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 2550 |

De donde resulta obvio ver que

Por tanto el número que debe ir en la segunda casilla es .

## Problema #2

Fernando escribe en la pizarra una fila de números , luego le pide a Julio que escriba entre ellos varios signos , de tal manera que la suma que quede escrita de como resultado . Determinar todas las posibles cantidades de números que pudo haber escrito Fernando para que Julio pueda realizar su tarea.

**Solución:**

Sea , la ecuación que queda escrita luego de que Julio añade los signos , entonces es obvio que donde .

Sea la cantidad de números “8” escritos en la pizarra.

Caso 1: Todos los sumandos formados luego de poner los signos son de un dígito.

En este caso es obvio que la única solución es donde , entonces .

Caso 2: Existe por lo menos un sumando de dos dígitos pero ninguno de tres dígitos luego de poner los signos.

Caso 2.1: Existe solo un sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.2: Existe solo 2 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.3: Existe solo 3 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.4: Existe solo 4 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.5: Existe solo 5 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.6: Existe solo 6 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.7: Existe solo 7 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.8: Existe solo 8 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.9: Existe solo 9 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.10: Existe solo 10 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Caso 2.11: Existe solo 11 sumandos de dos dígitos luego de poner los signos.

S.P.G. podemos decir que entonces .

Ya no hay más casos de sumando de dos dígitos, ya que si hubieran sumandos de dos dígitos, su suma sería mayor a .

Caso 3:Existe un sumando que es de dígitos

Caso 3.1: Existe un sumando que es de dígitos y un sumando de dígitos.

S.P.G. podemos decir que .

Caso 3.2: Existe un sumando que es de dígitos y todos los otros sumandos de un dígito.

S.P.G. podemos decir que .

Con esto se concluye que las únicas posibles cantidades de “” que hacen posible la tarea de Julio son

## Problema #3

Un número entero positivo es llamado “*guayaco*” si es menor que la suma de sus tres divisores más grandes (sin incluir a ). Demuestre que todo número guayaco es divisible para 6.

**Solución:**

Supongamos que existe algún número guayaco que no es divisible para 6 y sean sus tres divisores más grandes sin incluir a , entonces debería cumplirse que:

Ahora existen algunas posibilidades

no es divisible ni para 2 ni para 3, entonces , lo cual es absurdo.

no es divisible para pero si para , entonces , lo cual es un absurdo.

no es divisible para pero si para , entonces , lo cual es un absurdo.

Por tanto lo que se supuso es falso, y queda demostrado con lo cual se concluye el problema.

## Problema #4

Encontrar todos los enteros positivos tales que es un cuadrado perfecto.

**Solución:**

Sea un entero positivo talque . Realizaremos un análisis de la ecuación en cuanto a los posibles restos de estos números en la división para 4.

de donde resulta obvio que si es par entonces deja resto en la división para , y si es impar deja resto en la división para .

obviamente deja resto en la división para 4.

por ser un cuadrado perfecto solo puede dejar resto ó en la división para .

Teniendo en cuenta lo anterior podemos decir que necesariamente es par, por lo cual debe existir un entero positivo tal que . Entonces:

Y en vista que las únicas posibles representaciones de 147 como multiplicación de dos factores son

Se concluye que , con lo cual la única respuesta es .

## Problema #5

Sea un triángulo acutángulo y sea su circuncírculo. La bisectriz interna del ángulo intersecta a en , a en (distinto de , y a la tangente a por en . Demuestre que es el punto medio de si y solo si .

**Solución:**

Por ángulos inscritos en circunferencia podemos decir que porque están inscritos en el mismo arco , por teorema del ángulo semiinscrito y como se puede decir que con lo que es bisectriz de , entonces:

por criterio ángulo, ángulo, ángulo entonces

Por teorema de la bisectriz usado en el tenemos .

por criterio ángulo, ángulo, ángulo entonces .

Con lo cual resulta evidente que

Por tanto queda demostrado y se concluye el problema.

## Problema #6

Sean . Pruebe que

**Solución:**

Llamaremos al lado izquierdo de la desigualdad, entonces es fácil ver que

Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la forma Arthur Engel tenemos que

Por otro lado se conoce que

Entonces

Por tanto queda demostrado.